Université du 20 août 1955 Skikda
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques — Dr N. BELLAL
1[ère] année MASTER (A.F.A, A.N.EDP, C.O.S.D) — 14/03/2017
Module : Analyse Fonctionnelle 1. — Durée: 1h30mn

Examen de rattrapage

Exercice 1

Soient E un ensemble non vide et (F, d_F) un espace métrique.

1) Donner la définition d'une fonction bornée $f : E \to F$.

2) Notons par $B(E, F)$ l'ensemble des fonctions bornées de E dans F. Posons $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in E} d_F(f(x), g(x))$ pour $f, g \in B(E, F)$. Montrer que $(B(E, F), d_\infty)$ est un espace métrique

3) Donner une condition nécessaire pour que $(B(E, F), d_\infty)$ soit complet. Justifier votre réponse.

Exercice 2

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach et soit T un opérateur linéaire continu. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:

1) T est injectif et à image fermée.

2) il existe une constante $c > 0$, tel que $\|Tx\|_F \geq c\|x\|_E, \forall x \in E$.

Exercice 3

1) Donner la définition d'un espace de Baire.

2) Montrer que $(\mathbb{R}, |.|)$ est un espace de Baire.

3) Soit (E, d) un espace métrique complet et $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de fermés telle que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Montrer que:

$\exists n \in \mathbb{N}$ tel que: $\overset{0}{F_n} \neq \emptyset$.

Bonne chance